



## Серия №22. Квадратичные (не)вычеты – 2.

14 июля

Вспоминаем листочки «Суммы квадратов – 2» и «Квадратичные вычеты»

### Задачи

1. Найдите  $\left(\frac{-1}{p}\right)$  и заново сдайте задачи 1а) и 2 с «Суммы квадратов – 2»:
  - 1а) Если  $x^2 + y^2$  делится на простое число  $p = 4k + 3$ , то числа  $x$  и  $y$  делятся на  $p$ .
  - 2) Если простое число  $p = 4k + 1$ , то существует такое  $b$ , что  $b^2 + 1 \div p$ .
2. Решите в целых числах уравнение:
$$(a^2 - 1)(b^2 - 1) = 4c^2 + (2c + 1)^2$$
3. Докажите, что простых чисел каждого из видов  $4k + 3$  и  $4k + 1$  бесконечно много.
4. Решите уравнение в целых числах:  $x^3 + 7 = y^2$ .
5. Решите уравнение в натуральных числах:  $4xy - x - y = z^2$ .
6. Вспомните критерий Гаусса и вычислите  $\left(\frac{2}{p}\right)$  для каждого нечетного простого  $p$ .
7. Докажите, что у числа  $2^n + 1$  не может быть простых делителей вида  $8k + 7$ .
8. Докажите, что простых чисел каждого из видов  $8k + 3$ ,  $8k + 5$  и  $8k + 7$  бесконечно много.
9. Докажите, что число 2 является квадратичным вычетом по модулю  $7^n$  при любом натуральном  $n$ .